2 Rechnen mit Potenzen

2.1 Potenzgesetze

Rechengesetze für Potenzen: Die Nenner sind hierbei immer ungleich 0.
$a \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$:

$$a^k = \underbrace{a \cdot a ... a \cdot a}_{k} \tag{2.1}$$

$a \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$

$$a^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{a} \tag{2.2}$$

$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{R}$ **Multiplikation:**

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m \tag{2.3}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \tag{2.4}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \tag{2.5}$$

Division:

$$(\frac{a}{b})^m = \frac{a^m}{b^m} \tag{2.6}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \tag{2.7}$$

daher gilt:

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

2.1.1 Abgeleitete Rechengesetze

Begründen Sie mittels obiger Rechengesetze. Geben Sie je die verwendeten Rechengesetze an:

1. $x \in \mathbb{R} : x^{-1} = \frac{1}{x}$
2. $x \in \mathbb{R}, p, q \in \mathbb{N} : x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$
3. $x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x^{-1}} = x$
4. $x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N} : \sqrt[k]{x^k} = x$

Übung 2.1:

1. Übungsaufgaben online:
   http://www.abfrager.de/gymnasium/klasse9/mathematik/potenzrechnung.htm

2. Berechnen Sie je das Endergebnis. Vereinfachen Sie soweit wie möglich.
   $a, b, c, x \in \mathbb{R}$

(a) $2^4 \cdot 2 \cdot 2^{-2}$

(b) $2x^2 \cdot 3x^{-3}$

(c) $(\sqrt{a})^6$

(d) $(ab)^3 \cdot \sqrt[3]{b} \cdot a \cdot b^{\frac{2}{3}}$

(e) $\frac{1}{c^{-2}}$

(f) $\frac{\sqrt{a} \cdot b^{\frac{2}{3}} \cdot b}{b^{-\frac{1}{3}} \cdot a}$

3 Bruchrechnen

Rechenregeln zum Bruchrechnen: $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, Zahlen im Nenner sollen hierbei nie 0 sein. Aus den Regeln zu den Potenzen ergibt sich, dass man gleiche Terme im Zähler und Nenner kürzen kann.

$$\frac{a \cdot b}{b \cdot c} = \frac{a}{c} \tag{3.8}$$

Umgekehrt kann man Brüche erweitern. Dazu multipliziert man den gleichen Wert an Zähler und Nenner.

$$\frac{a}{b} = \frac{c \cdot a}{c \cdot b} \tag{3.9}$$

Multiplikation zweier Brüche:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \tag{3.10}$$

Division zweier Brüche:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \tag{3.11}$$

Die Addition zweier Brüche kann nur durchgeführt werden, wenn beide Nenner gleich sind.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \tag{3.12}$$

Beispielaufgaben:

1. $\frac{2 \cdot 21}{7 \cdot 4} = \frac{3}{2}$
2. Vorsicht beim Kürzen bei Summen
   $\frac{4a+18b}{6} = \frac{2 \cdot (2a+9b)}{6}$
3. $\frac{2}{3} - \frac{1}{8} = \frac{16-3}{24}$
4. $\frac{2a}{3b} + \frac{1}{8a} = \frac{16a^2+3b}{24ab}$
5. $\frac{\frac{6}{2}}{9} = \frac{6}{2 \cdot 9} = \frac{1}{3}$

Übung 3.0:

Vereinfachen Sie das Ergebnis soweit wie möglich. Schreiben Sie das Endergebnis als einen Bruch.

1. $\frac{a}{2b} + \frac{2a}{b}$
2. $\frac{6a-8b}{4ab}$
3. $\frac{20a^2}{b} \cdot \frac{b^2}{4a-a^2}$
4. $\frac{a-b}{\frac{a^2-b^2}{2}}$
5. $\frac{1}{2a} + \frac{1}{a^2} - \frac{2}{4a^2}$
6. $\frac{5a^2-6a^3-3a}{a \cdot b^2} + \frac{b^2}{(ab)^2}$
7. $\frac{3a}{a+b} - \frac{3b}{b-a}$

Die Knobelaufgabe

$\frac{2}{3}$ einer Tafel Schokolade sind soviel wie eine halbe Tafel plus 2 Stückchen. Wieviele Stücke hat die Tafel?