Das Kreuzprodukt und der Normalenvektor einer Ebene

Eine Ebene im R^3 kann durch einen Punkt und einen Richtungsvektor $\vec{n}$ beschrieben werden. Dieser Vekror $\vec{n}$ hat die Eigenschaft, dass er senkrecht zur Ebene steht.
Verbindet man auf der Ebene E zwei beliebige unterschiedliche Punkte P_1 und P_2 dann ergibt das Skalarprodukt

$$\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{n} = 0$$

Ist die Ebene E in Parameterform gegeben, so kann man diesen Vektor $\vec{n}$ mittels des Kreuzproduktes, auch äußeres Produkt oder Vektorprodukt genannt, leicht berechnen.

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}, \vec{P_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

1. Informieren Sie sich über das Kreuzprodukt und wie man es berechnet. Berechnen Sie dann das Kreuzprodukt $\vec{n} = \vec{v_1} \times \vec{v_2}$.

2. Die Ebene E ist gegeben durch:

$$E : \vec{x} = \vec{P_E} + r \cdot \vec{v_1} + s \cdot \vec{v_2}$$

   (a) Berechnen Sie eine Darstellung dieser Ebene in der Koordinatenform

$$a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 = d$$

   (b) Untersuchen Sie den Vektor $\vec{n}$ aus 1. und $\vec{w} = (a, b, c)$ auf lineare Abhängigkeit.

   (c) Weisen Sie nach, dass für den Punkt $P_1(-1|-7|13)$ und P_E der Richtungsvektor $\overrightarrow{P_EP_1}$ senkrecht zu $\vec{n}$ steht. und zeigen Sie, dass für alle Punkte $X(x_1, x_2, x_3) \in E$ gilt:

$$\overrightarrow{P_EX} \cdot \vec{n} = 0$$